Παραδειγμα:

Εστω $S = \varphi(K)$, $K = \overline{B}((0,0),1)$ $\forall (s,t) \in T$

$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u \cdot v \end{pmatrix}$. Να υπολογιστη το ολοκληρωμα

$$I = \int_{\varphi} (x,y,z) \cdot n \, d\sigma$$

ΛΥΣΗ

$$I \int_{\varphi} (x,y,z)\, n \cdot d\sigma = \int_{\overline{B}((0,0),1)} (u, v, u \cdot v)\, N(\varphi(u,v))\, d(u,v) =$$

$$= \int_{\overline{B}((0,0),1)} (u, v, u \cdot v) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \cdot d(u,v) =$$

$$= \int_{\bar{B}((0,0),1)} (u, v, u\cdot v) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix} \right) d(u,v) =$$

$$= \int_{\bar{B}((0,0),1)} (u, v, u\cdot v) \cdot \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} d(u,v) =$$

$$= \int_{\bar{B}((0,0),1)} (u, v, u\cdot v) \cdot (-v, -u, 1)\, d(u,v) =$$

$$= \int_{\bar{B}((0,0),1)} -uv - \cancel{uv} + \cancel{uv}\; d(u,v) = -\int_{\bar{B}((0,0),1)} u\cdot v\, d(u,v) \quad (1)$$

Μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \rho \in [0,1] \text{ και } \varphi \in [0, 2\pi]$$

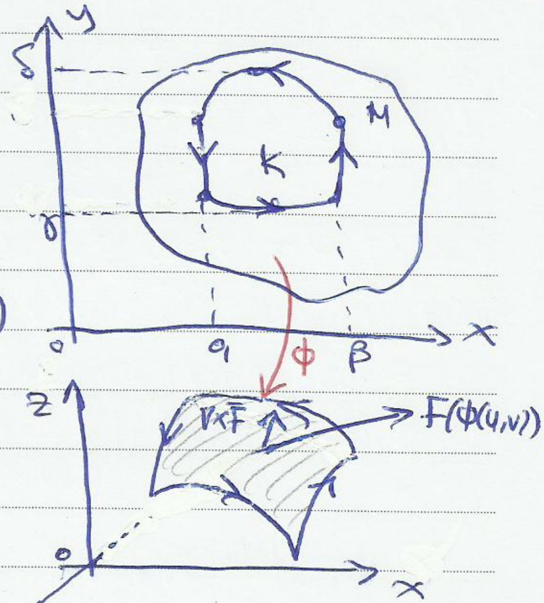
$$(1) \to I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \cos\varphi \cdot \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi = 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (STOKES)

Έστω $M \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, $K \subset M$ ένα κανονικό χωρίο ως προς x και y με θετικά προσανατολισμένο σύνορο $\partial K = \gamma([a,b])$ με $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ κατά τμήματα C^1 (κανονική) καμπύλη, φ η παραμετρική επιφάνεια με σύνολο παραμέτρων K, $\Phi : M \to \mathbb{R}^3$ C^2 και $F : N \to \mathbb{R}^3$ με $N \supset \varphi(K)$ C^1

τότε:

$$\int_{\phi} (\nabla \times F) \cdot n \, d\sigma = \int_{\varphi \circ \gamma} F \cdot d(x,y,z)$$



onow

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathrm{curl}\, f$$